



Aspetti aeroelastici dei carichi non stazionari: gust e buffet

Ing. Daniele Monti

Pisa, 06-07 Dicembre 2019



Daniele Monti.

Nato a La Spezia nel 1974.

- Nel 2000 si laurea in ingegneria Aerospaziale all'Università di Pisa con una tesi sperimentale sul buffeting del YAK130D.
- E' ufficiale di Marina Militare fino al 2002.
- L'anno successivo entra nel team di sviluppo del nuovo addestratore avanzato di Aermacchi, M346, come specialista di **dinamica strutturale e di aeroelasticità**. Fino ad oggi ha seguito tutti gli aspetti legati ai carichi strutturali su M346, M345, C27, Piaggio P1HH interessandosi in particolare ai carichi dinamici e loro implicazioni.
- Al momento è coinvolto nello studio di modelli di **integrazione CFD /calcolo strutturale**, metodi di **ottimizzazione aeroelastica** e sviluppo di sistemi di **controllo per alleviazione dei carichi dinamici**.
- Ha partecipato ad alcuni progetti Europei; è coautore di articoli scientifici sul buffet e sul controllo attivo.

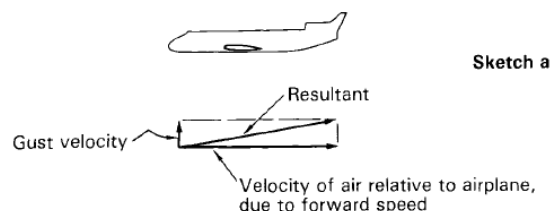
Argomenti:

- Gust, Raffica o Turbolenza... introduzione e fenomenologia;
- Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, design envelope e mission profile
- Soluzione Nastran SOL146
- FDT dei carichi tramite Monitoring Point
- PSD, Varianza e Covarianza, ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi
- Il Buffet, introduzione del fenomeno
- Caratterizzazione dell'input, Flight Test, CFD
- Soluzione del problema aeroelastico del Buffet

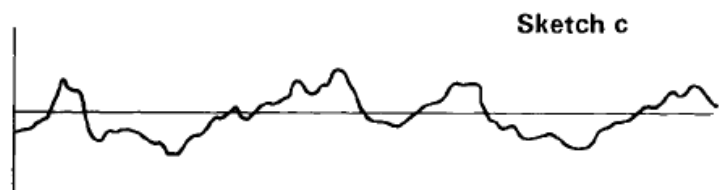
Gust, Raffica o turbolenza... introduzione e fenomenologia

Raffica (o gust) e turbolenza sono spesso considerate come fenomeni distinti: un fenomeno **discreto la raffica** e un fenomeno **continuo la turbolenza**. In realtà gli approcci più recenti, accettati dalle autorità certificativi, consigliano una visione d'insieme alla turbolenza atmosferica che privilegi l'approccio continuo e distribuito.

Per noi quindi **raffica, gust o turbolenza saranno sinonimi** e si riferiscono al medesimo fenomeno fisico ossia la turbolenza atmosferica come **processo continuo e random**. Vediamo di cosa si tratta:



Alla base c'è la variazione nel tempo del flusso che il velivolo incontra. Verticale o laterale questo determina una variazione dell'angolo di attacco o di sideslip. Un tipico profilo di gust (velocità dell'aria verticale o laterale, ma anche orizzontale) nello spazio quindi sarà:

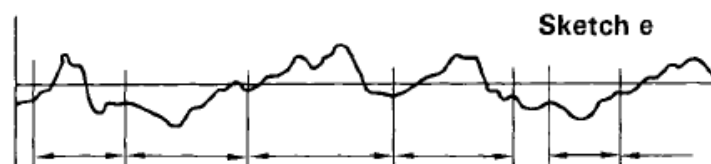


Questo diventa una time history quando la dimensione spaziale viene divisa per la velocità del velivolo. Quando il profilo o meglio la struttura della gust è continua si parla di **turbolenza**, se prevalgono fenomeni discreti si preferisce parlare di **gust o raffica**, ma il fenomeno è lo stesso!!!



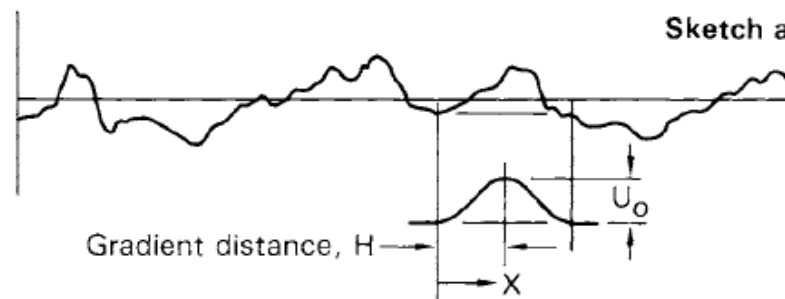
Gust, Raffica o turbolenza... introduzione e fenomenologia

Un fenomeno continuo per esigenza di modellazione potrebbe anche essere visto come successione di elementi discreti:



Si ricorre all'idealizzazione "1-cos":

Dove U_0 e H sono regolati dalle normative.



$$U = \frac{1}{2} U_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{2H} \right)$$

L'approccio discreto è una forte **semplificazione** del fenomeno.

L'approccio continuo vede la struttura della gust come un **processo randomico, stazionario e Gaussiano**

- Stazionario: la proprietà statistiche non variano nel tempo.
- Random: non esiste una relazione deterministica tra velocità di gust e tempo o spazio. Bisogna ricorrere al concetto di probabilità
- Gaussiano: la densità di probabilità segue la legge di Gauss.

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2}$$

Gust, Raffica o turbolenza... introduzione e fenomenologia

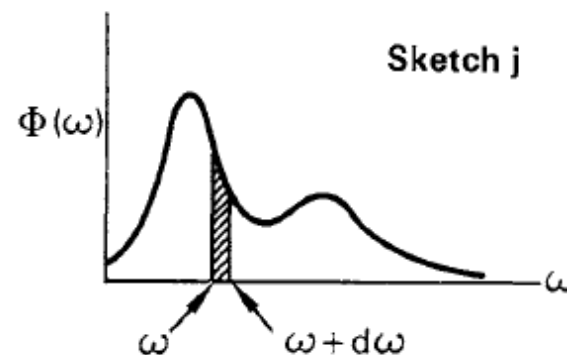
Per completare la caratterizzazione statistica della turbolenza atmosferica serve la sua distribuzione in frequenza.

Introduciamo il concetto di **PSD, power spectral density**.

La PSD misura il contenuto in frequenza di un processo randomico.

$\Phi(\omega)$: PSD di $y(t)$

$\Phi(\omega) d\omega$ è il contributo alla varianza σ_y^2 delle frequenze tra ω e $d\omega$



In particolare quindi l'rms (root mean square):

$$\sigma_y = \sqrt{\int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega}$$

Si dimostra che la PSD è la trasformata di Fourier della funzione di autocovarianza.

La PSD può anche essere vista come media del quadrato della trasformata di Fourier.

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T y(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (4.8)$$

$||$ denotes modulus of the complex quantity.

Fourier transform of $y(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

where $y(t)$ has been truncated to have zero value outside the range $-T$ to T .

Gust, Raffica o turbolenza... introduzione e fenomenologia

Le **normative** definiscono due tipologie di PSD rappresentative della gust: **von Karman** e **Dryden** con rms unitario.
 Ω è la frequenza spaziale definita in rad/ft

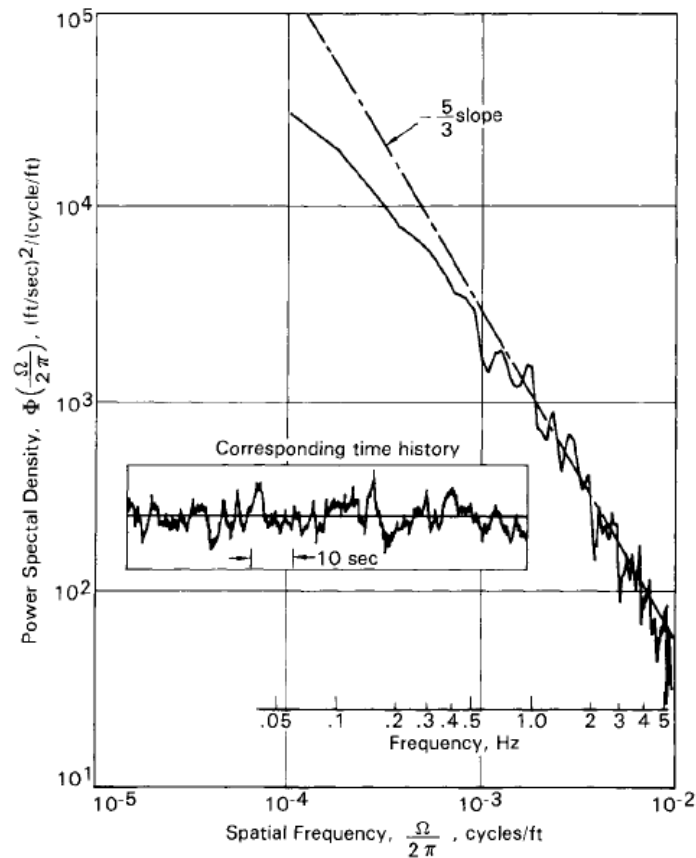


Fig. 4.6 Typical gust velocity psd; flight-measured.

von Kármán
 (Use for design, $L = 2500$ feet)

$$\Phi(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(1.339L\Omega)^2}{[1 + (1.339L\Omega)^2]^{11/6}}$$

Dryden

$$\Phi(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{1 + 3L^2\Omega^2}{[1 + L^2\Omega^2]^2} \quad (4.16)$$

Gust, Raffica o turbolenza... introduzione e fenomenologia

Vale la relazione $\Omega = \omega/V = 2\pi f/V$

Dal momento che:

$$\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \Phi(f) df = \int_0^{\infty} \Phi(\Omega) d\Omega = \sigma^2$$

Si ha in [hz]

$$\Phi(f) = \sigma^2 \left(\frac{2\pi}{V} \right) \frac{L}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(1.339L\Omega)^2}{[1 + (1.339L\Omega)^2]^{11/6}}$$

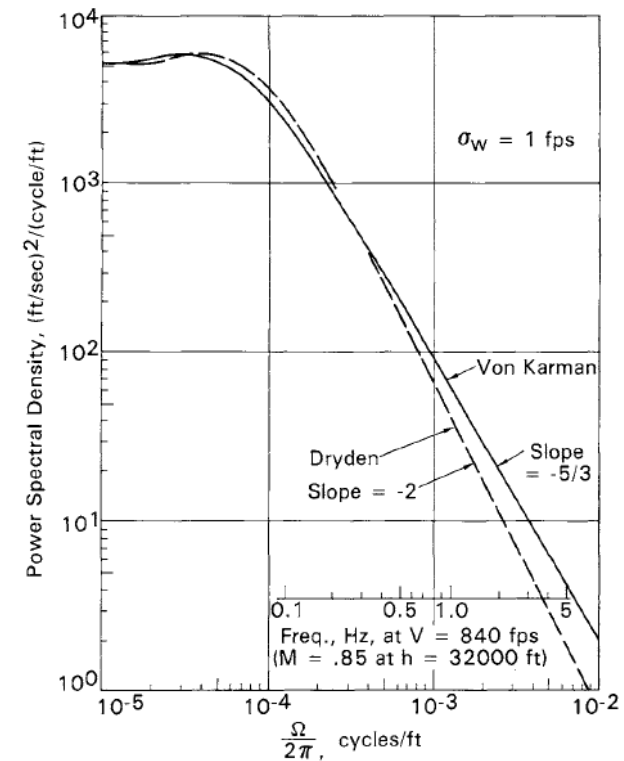
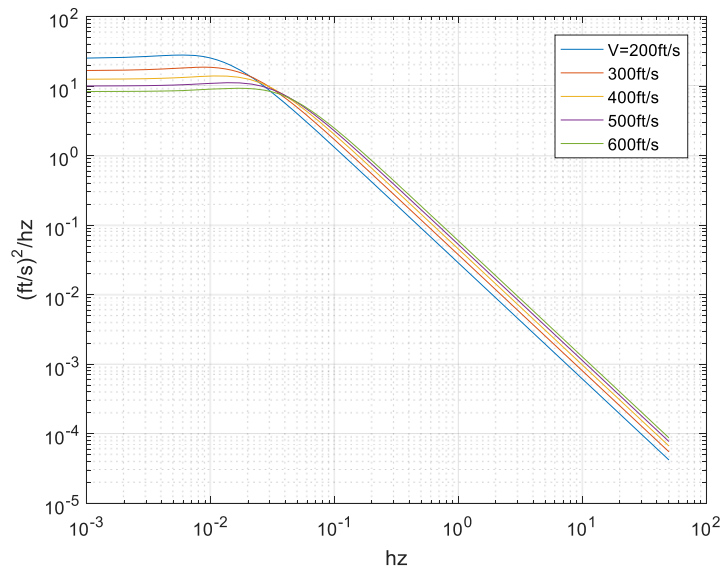


Fig. 4.9 Von Kármán and Dryden gust psd's; $L = 2500$ ft.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Abbiamo visto gli ingredienti che stanno alla base del fenomeno. Vediamo come questi entrano nel processo che porta alla definizione dei carichi strutturali per un velivolo elastico che in volo incontra un fronte turbolento o gust.

Raffica continua.

Nel caso di un processo continuo, l'output di un sistema lineare nota la PSD dell'unico input è:

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2 \Phi_w(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 \Phi_I(f)$$

Dove Φ_I è la PSD della gust con rms unitario, $H(f)$ è la funzione di trasferimento tra gust e l'output di interesse (accelerazione, spostamento, carico integrato, stress, strain...), y la PSD dell'output.

$H(f)$ si calcola con un codice aeroelastico (NASTRAN)

Calcoliamo l'rms

$$\sigma_y = \sqrt{\int_0^\infty \Phi_y(f) df} = \sqrt{\int_0^\infty |H(f)|^2 \sigma_w^2 \Phi_I(f) df} = \sigma_w \sqrt{\int_0^\infty |H(f)|^2 \Phi_I(f) df}$$

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Definiamo $A = \frac{\sigma_y}{\sigma_w}$

A si ottiene per un sistema aeroelastico quindi varia in funzione di mach, e pressione dinamica.

Ci sono due criteri principali per il calcolo dei carichi strutturali derivanti da gust in accordo all'approccio continuo: **Design envelope** e **mission profile**

Entrambi si basano sulla conoscenza del rapporto A per ogni punto analizzato, richiedono la scelta di una forma di PSD di gust, ma l'approccio mission profile richiede la conoscenza dell'utilizzo del velivolo che non sempre è nota con esattezza soprattutto per velivoli militari o prototipi.

Design envelope

Si basa sulla seguente relazione:
il valore di design della grandezza y
è:

$$y_{\text{design}} = \sigma_y \eta_d = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_w} \sigma_w \right) \eta_d = (\bar{A} \sigma_w) \eta_d = \bar{A} (\sigma_w \eta_d) \quad (5.2)$$

Design rms value of y

Design ratio of peak to rms values

From dynamic analysis

Design gust velocity U_σ

$$y_{\text{design}} = \bar{A} \cdot U_\sigma \quad (5.3)$$

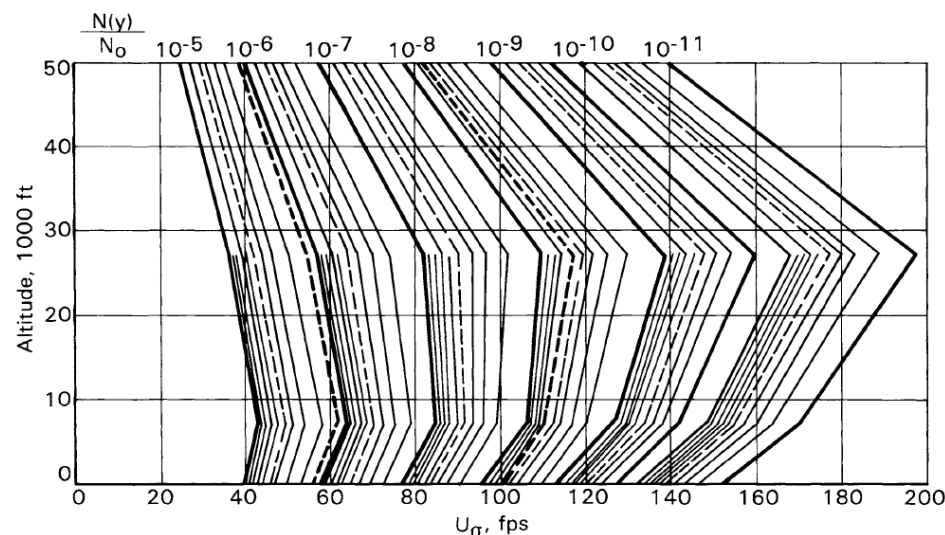


Fig. 5.4 Variation of U_σ with altitude, family of constant $N(y)/N_0$ curves.

La design gust velocity è definita nelle normative e dipende dalla probabilità di eccedere tale valore quota per quota.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Normativa CS25

(b) Continuous Turbulence Design Criteria.

The dynamic response of the aeroplane to vertical and lateral continuous turbulence must be taken into account. The dynamic analysis must take into account unsteady aerodynamic characteristics and all significant structural degrees of freedom including rigid body motions. The limit loads must be determined for all critical altitudes, weights, and weight distributions as specified in CS 25.321(b), and all critical speeds within the ranges indicated in subparagraph (b)(3).

(1) Except as provided in subparagraphs (b)(4) and (b)(5) of this paragraph, the following equation must be used:

$$P_L = P_{L-1g} \pm U_G \bar{A}$$

Where:

P_L = limit load;

P_{L-1g} = steady 1-g load for the condition;

$\bar{A}$ = ratio of root-mean-square incremental load for the condition to root-mean-square turbulence velocity; and

U_G = limit turbulence intensity in true airspeed, specified in subparagraph (b)(3) of this paragraph.

(2) Values of $\bar{A}$ must be determined according to the following formula:

$$\bar{A} = \sqrt{\int_0^{\infty} |H(\Omega)|^2 \Phi_I(\Omega) d\Omega}$$

....

Where:

$H(\Omega)$ = the frequency response function, determined by dynamic analysis, that relates the loads in the aircraft structure to the atmospheric turbulence; and

$\Phi_I(\Omega)$ = normalised power spectral density of atmospheric turbulence given by:

$$\Phi_I(\Omega) = \frac{L}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(1.339\Omega L)^2}{[1 + (1.339\Omega L)^2]^{11/6}}$$

Where:

Ω = reduced frequency, rad/ft; and

L = scale of turbulence = 2,500 ft.

(3) The limit turbulence intensities, U_G , in m/s (ft/s) true airspeed required for compliance with this paragraph are:

(i) At aeroplane speeds between V_B and V_C :

$$U_G = U_{Gref} F_g$$

Where:

U_{Gref} is the reference turbulence intensity that varies linearly with altitude from 27.43 m/s (90 ft/s) (TAS) at sea level to 24.08 m/s (79 ft/s) (TAS) at 7315 m (24000 ft) and is then constant at 24.08 m/s (79 ft/s) (TAS) up to the altitude of 18288 m (60000 ft); and F_g is the flight profile alleviation factor defined in subparagraph (a)(6) of this paragraph;

(ii) At speed V_D : U_G is equal to 1/2 the values obtained under subparagraph (3)(i) of this paragraph.

(iii) At speeds between V_C and V_D : U_G is equal to a value obtained by linear interpolation.

(iv) At all speeds both positive and negative incremental loads due to continuous turbulence must be considered.

(4) When an automatic system affecting the dynamic response of the aeroplane is included in the analysis, the effects of system non-linearities on loads at the limit load level must be taken into account in a realistic or conservative manner.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Normativa MIL-A-8861

- 40 feet per second from 0 to 1000 feet, then
- Varying linearly to 58 feet per second at 2500 feet, then
- Varying linearly to 62 feet per second at 7000 feet, then
- Varying linearly to 55 feet per second at 27,000 feet, then
- Varying linearly to 14 feet per second at 80,000 feet.

3.5.2.3 Normalized power spectrum. The scale of turbulence L , to be used to compute gust response factors in both the RPA and design envelope analysis are also shown in Table III. The normalized power spectrum of atmospheric turbulence shall be:

$$\phi_n(\Omega) = \frac{L}{\pi} \frac{1 + 8/3 (1.339 L \Omega)^2}{[1 + (1.339 L \Omega)^2]^{11/6}}$$

Si noti che i valori di design gust velocity variano molto con le normative di riferimento e dai criteri di progetto:

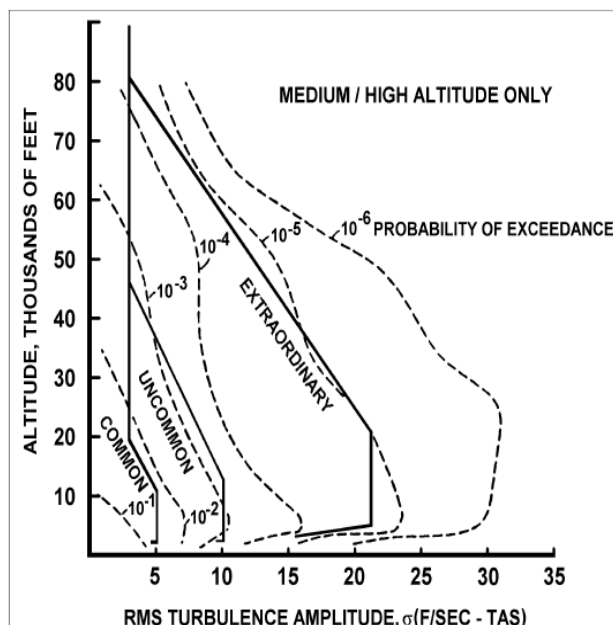


FIGURE 6.4.6-4. Turbulence intensities and probability of exceedance.

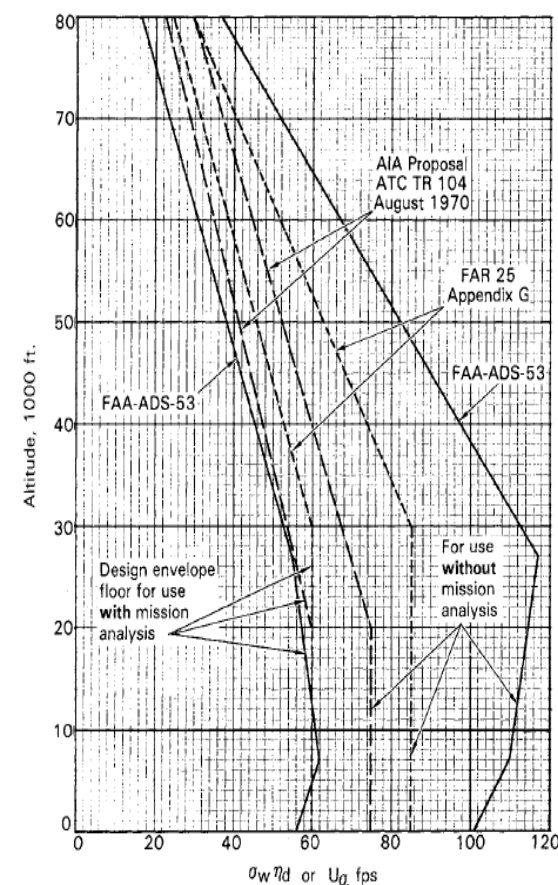


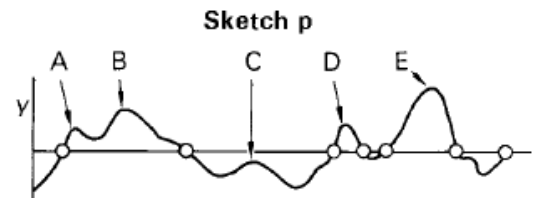
Fig. 5.5 Various proposals for variation of design U_g with altitude.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Mission Profile

Introduciamo il concetto di **eq. di Rice**. L'equazione definisce il numero di attraversamenti di un dato livello di y con pendenza positiva per unità di tempo. N_0 è la frequenza caratteristica o attraversamenti positivi dello zero.

$$N(y) = N_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2}$$



L'equazione di Rice fornisce un conteggio del numero di picchi eccedenti la soglia y (tanto più vero quanto il processo è narrow band):

Considerando la grandezza $A = \sigma_y / \sigma_w$

Si ha:

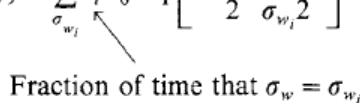
$$\begin{aligned} N(y) &= N_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2 \right] = N_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{A \sigma_w} \right)^2 \right] \\ &= N_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y/A)^2}{\sigma_w^2} \right] \end{aligned}$$

questa esprime il numero di attraversamenti positivi per unità di tempo della grandezza y se l'rms della gust è σ_w

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Sovrapposizione di una distribuzione con rms di gust variabile:

$$N(y) = \sum_{\sigma_{w_i}} t_i N_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y/\bar{A})^2}{\sigma_{w_i}^2} \right]$$

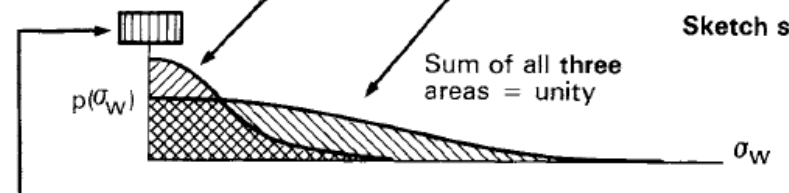

 Fraction of time that $\sigma_w = \sigma_{w_i}$

Se consideriamo una variazione continua di rms di gust avente la propria funzione di densità di probabilità si ottiene:

$$N(y) = \int_{\sigma_w=0}^{\infty} N_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y/\bar{A})^2}{\sigma_w^2} \right] \underbrace{p(\sigma_w) d\sigma_w}_{\substack{\text{Probability density} \\ t_i}}$$

L'rms di raffica ha una sua funzione di densità di probabilità analiticamente definita:

$$p(\sigma_w) = P_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_w}{b_1} \right)^2 \right] + P_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b_2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_w}{b_2} \right)^2 \right] \quad (4.26)$$



“Signboard” or delta function—area indicates probability that $\sigma_w = 0$. This is not included explicitly in Eq. (4.26), which will be utilized only over the range $\sigma_w > 0$.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

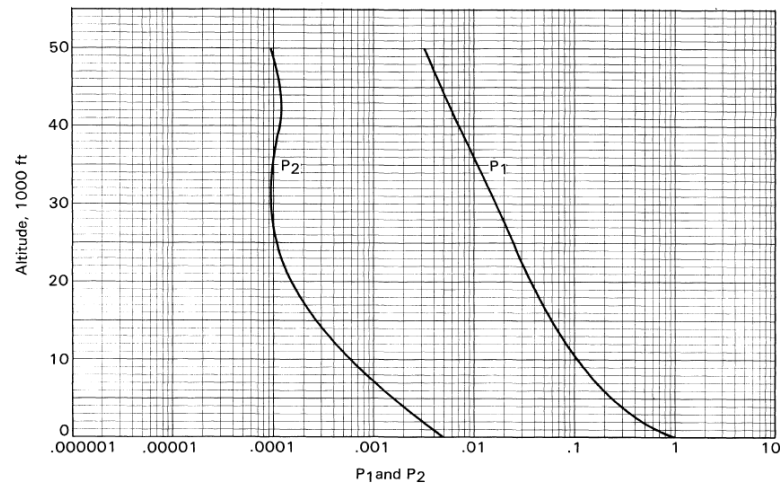


Fig. 4.14 P_1 and P_2 values for use in design.

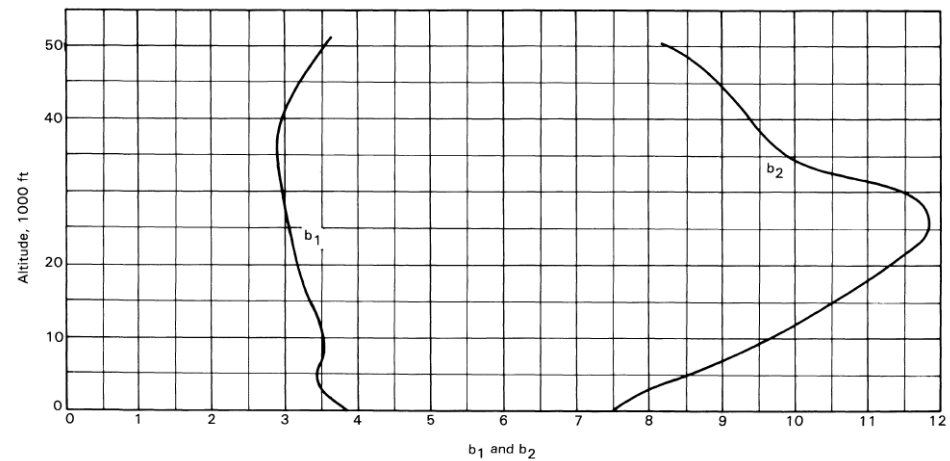


Fig. 4.15 Values of b_1 and b_2 for use in design.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Svolgendo i passaggi si dimostra che:

$$\frac{N(y)}{N_0} = P_1 \exp\left(-\frac{y/\bar{A}}{b_1}\right) + P_2 \exp\left(-\frac{y/\bar{A}}{b_2}\right)$$

Questa equazione è propedeutica all'applicazione del criterio mission analysis. Si supponga di avere a disposizione lo spettro di utilizzo del velivolo. Ossia la permanenza in, ad esempio, sec/1000FHR in un PIT (point in the sky) definito da mach e quota (e velocità, pressione dinamica ecc).

- b_1 , b_2 , P_1 e P_2 sono definita da tabella in funzione della quota;
- A è il rapporto tra rms della grandezza da analizzare (carico, stress,...) e l'rms della gust e N_0 sono definiti dal calcolo aeroelastico;

$$N(y) = \sum_i t_i N_0 \left[P_1 \exp\left(-\frac{|y - y_{1-g}|/\bar{A}}{b_1}\right) + P_2 \exp\left(-\frac{|y - y_{1-g}|/\bar{A}}{b_2}\right) \right]$$

Dove t_i è il tempo trascorso in quel punto.

Tipici esempi di applicazione del criterio mission profile si trovano in letteratura.

La scelta di una frequency of exceedance di design (nell'esempio 2×10^{-5} c/hr) permette di definire statisticamente il carico limite. Ossia, in questo caso, il carico con probabilità 2×10^{-5} di essere superato in una flying hour.

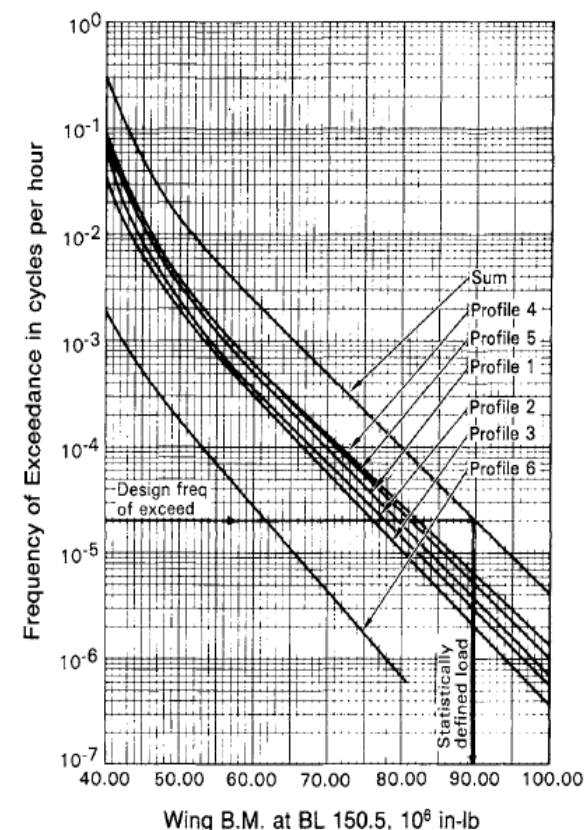


Fig. 5.2 Typical frequency of exceedance curves. Sum of profiles of early L-1011 version; low wing weight mix.

Approcci di analisi. Raffica discreta e Raffica continua, Design envelope e mission profile

Raffica discreta

La raffica discreta "1-cos" è una idealizzazione matematica della turbolenza atmosferica. Si preferisce usare l'approccio continuo perché più rappresentativo ma richiede strumenti di analisi basati sulla statistica e l'analisi in frequenza. L'approccio discreto lavora nel **dominio del tempo** e fornisce risultati più immediati. Spesso di più facile comprensione per altri enti aziendali!!!! Per cui vediamo cosa dicono le normative. Es CS25:

CS 25.341 Gust and turbulence loads (See AMC 25.341)

(a) *Discrete Gust Design Criteria.* The aeroplane is assumed to be subjected to symmetrical vertical and lateral gusts in level flight. Limit gust loads must be determined in accordance with the following provisions:

(1) Loads on each part of the structure must be determined by dynamic analysis. The analysis must take into account unsteady aerodynamic characteristics and all significant structural degrees of freedom including rigid body motions.

(2) The shape of the gust must be taken as follows:

$$U = \frac{U_{ds}}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi s}{H}\right) \right] \quad \text{for } 0 \leq s$$

$\leq 2H$

$$U = 0 \quad \text{for } s > 2H$$

where –

s = distance penetrated into the gust (metre);

U_{ds} = the design gust velocity in equivalent airspeed specified in sub-paragraph (a) (4) of this paragraph;

H = the gust gradient which is the distance (metre) parallel to the aeroplane's flight path for the gust to reach its peak velocity.

(3) A sufficient number of gust gradient distances in the range 9 m (30 feet) to 107 m (350 feet) must be investigated to find the critical response for each load quantity.

(4) The design gust velocity must be:

$$U_{ds} = U_{ref} F_g \left(\frac{H}{350} \right)^{1/6}$$

where –

U_{ref} = the reference gust velocity in equivalent airspeed defined in sub-paragraph (a)(5) of this paragraph;

F_g = the flight profile alleviation factor defined in sub-paragraph (a)(6) of this paragraph.

(5) The following reference gust velocities apply:

(i) At aeroplane speeds between V_B and V_C : Positive and negative gusts with reference gust velocities of 17.07 m/s (56.0 ft/s) EAS must be considered at sea level. The reference gust velocity may be reduced linearly from 17.07 m/s (56.0 ft/s) EAS at sea level to 13.41 m/s (44.0 ft/s) EAS at 4572 m (15 000 ft). The reference gust velocity may be further reduced linearly from 13.41 m/s (44.0 ft/s) EAS at 4572 m (15 000 ft) to 6.36 m/s (20.86 ft/sec) EAS at 18288 m (60 000 ft).

(ii) At the aeroplane design speed V_D : The reference gust velocity must be 0.5 times the value obtained under CS 25.341(a)(5)(i).

(6) The flight profile alleviation factor, F_g , must be increased linearly from the sea level value to a value of 1.0 at the maximum operating altitude defined in CS 25.1527. At sea level, the flight profile alleviation factor is determined by the following equation.

$$F_g = 0.5 (F_{gz} + F_{gm})$$

where –

$$F_{gz} = 1 - \frac{Z_{wo}}{76200}; \quad (F_{gz} = 1 - \frac{Z_{wo}}{250000})$$

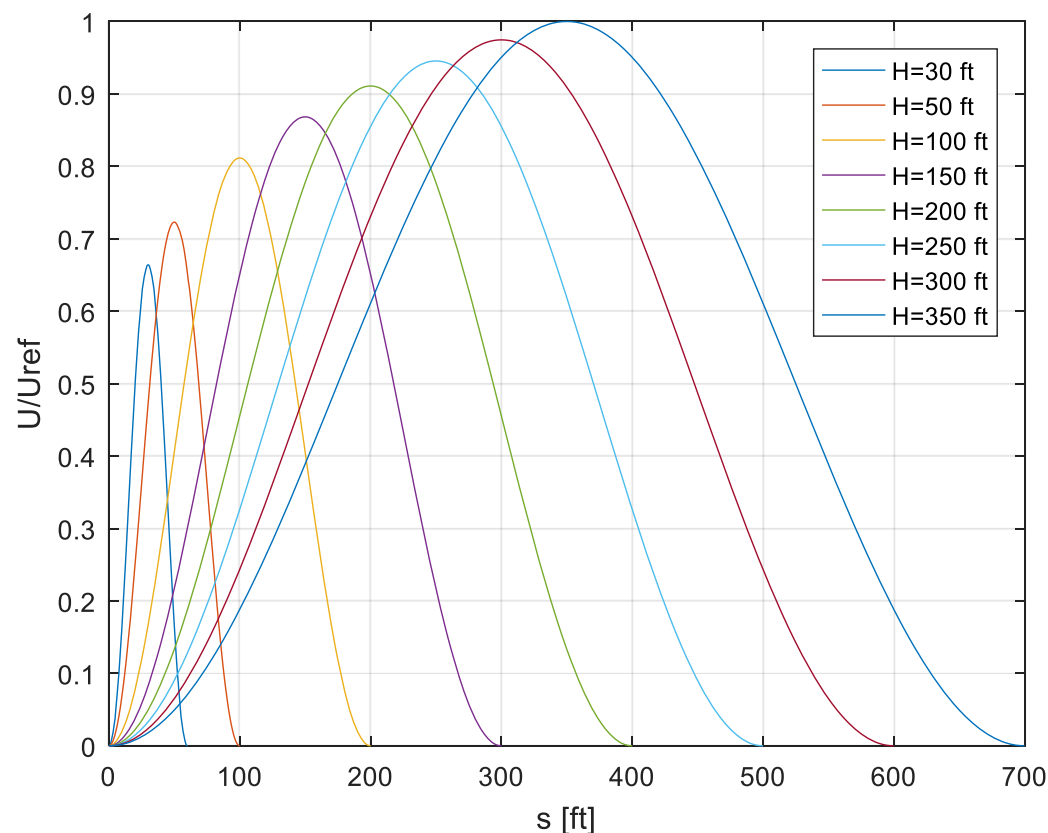
$$F_{gm} = \sqrt{R_2 \tan\left(\frac{\pi R_1}{4}\right)}$$

$$R_1 = \frac{\text{Maximum Landing Weight}}{\text{Maximum Take-off Weight}};$$

$$R_2 = \frac{\text{Maximum Zero Fuel Weight}}{\text{Maximum Take-off Weight}};$$

Approcci di analisi. Rafficca discreta e Rafficca continua, Design envelope e mission profile

Il profilo di velocità diventa:



Variando il gradiente di rafficca H si ottiene un tuning della risposta sui modi della struttura. L'approccio continuo comprende questo aspetto per sua natura essendo la PSD definita analiticamente su tutte le frequenze. **Questo aspetto è fondamentale nel caso aeroelastico.**

Soluzione Nastran SOL146

Applichiamo quanto visto finora ad un caso reale! **Velivolo M346**

Modello aeroelastico del velivolo
 Mach 0.8
 Altitude=10000ft;
 che corrisponde a:
 $U=263000 \text{ mm/s}$ (TAS)

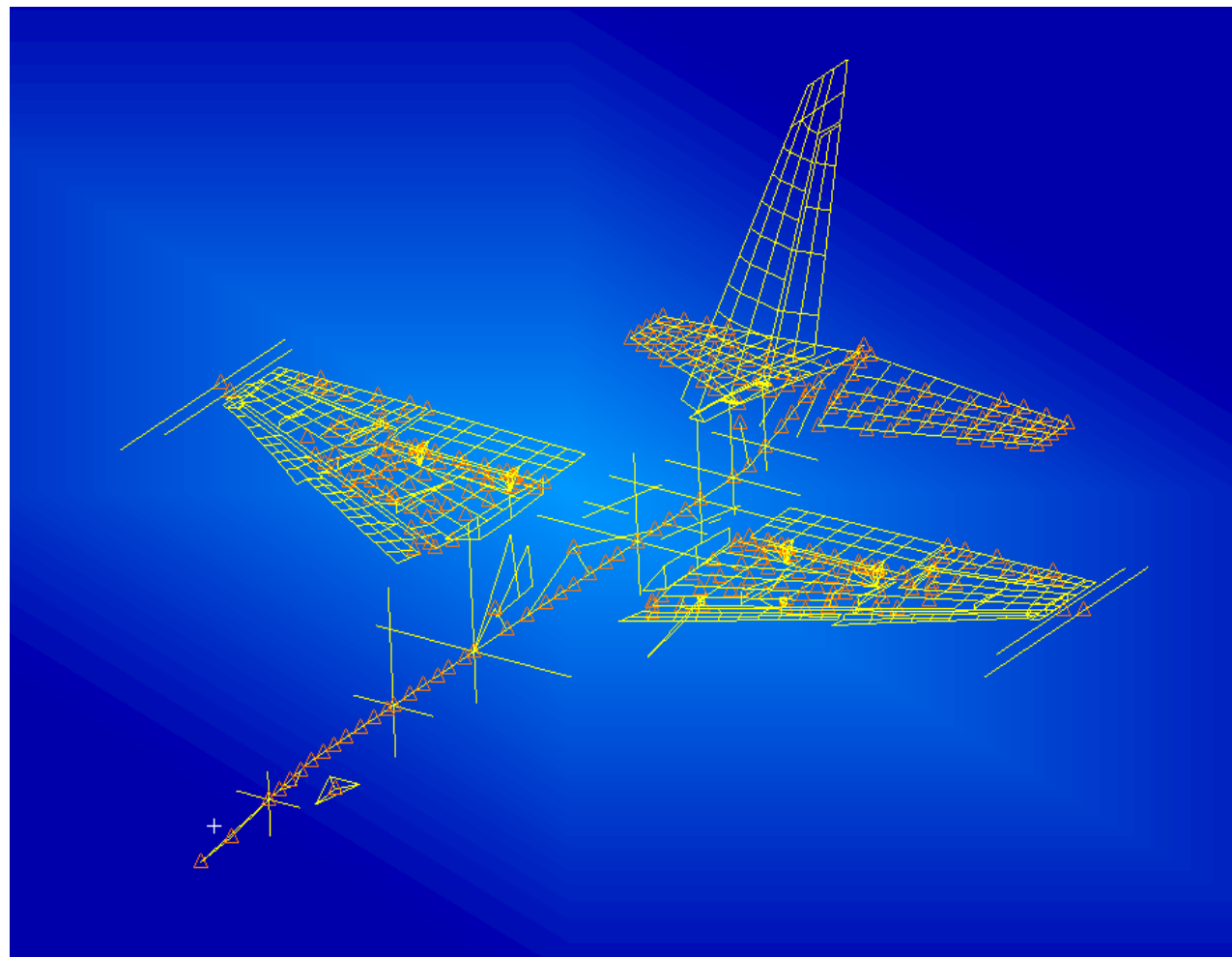
Modello ridotto tramite DMIG.
 Le porzioni del velivolo sono
 condensate in matrici di massa
 e rigidezza su nodi rappresentativi
 partendo dal modello FEM-stress.
 Procedura veloce e adatta ad analisi
 dinamiche.

Si usano le schede seguenti:
 PARAM,extout,dmigpch
 ASET1 123456 158045 158145...

Nei file .pch troviamo le matrici ridotte
 sui nodi dell'ASET

Le porzioni sono assemblate con
 RBE2, MPC, CELAS2...

Preferiamo NON usare modelli a travi



Soluzione Nastran SOL146

Input nastran per la soluzione di gust

```

PARAM  GUSTAERO-1
PARAM  MACH      8.00-01
PARAM  Q         3.14-02
AERO    2.63+05  2709.60  1.22-12  0      0

GUST    100      100      3.80-06  0.      2.63+05

RLOAD1  100      102      103
EPOINT  500
DMIG    STIFF    0        6        1        0
DMIG    STIFF    500      0        500      0
DAREA   102      500      1.0
TABLED1 103
0.      1.0      100.      1.0      ENDT
TABDMP1 110
0.      0.008    6.0      0.008    6.1      0.01    10.0    0.01
10.1    0.03    100.      0.03    ENDT
FREQ1   120      0.05    0.05    999
RANDPS  1000     1        1        1.0      0.0      1001
TABRNDG 1001     1        2.90+00  1.00+00

MKAERO1 8.00-01
0.001   0.01    0.02    0.04    0.08    0.16    0.32    0.64
MKAERO1 8.00-01
1.2     2.4     4.8

```

U [mm/s]

cma [mm]

U

1/U

RMS gust = 1

L/U

Spettro di Von Karman

FDT dei carichi tramite Monitoring Point

Definizione dei monitoring point per i calcolo dei carichi:

i monitoring point consentono di selezionare i grid sui si vogliono integrare rispetto ad un polo le forze esterne, inerziali, ed aerodinamiche... per l'equilibrio il loro integrale equivale alle forze elastiche!!!!

```

AECOMP  WS1      SET1      91001
MONPNT1 WS1      LH WING ROOT  y=-1290
        123456  WS1      0      6192.0  -1290.0  280.0

$ ws 1 - LH wing root [6192.0 -1290.0 280.0 ]
SET1    91001    224237    224246    224247    224273    224274    224275    224277
        224278    224952    224953    224954    224955    224956    224963    224964
        224965    224966    224967    224968    224969    224998    224999    228309
        228310    241511    241513    241514    241516    241550    241551    241552
        241553    241601    241602    241603    241604    241605    241606    258700
        258701    258702    258703    258704    258705    264901    264902    264904
        264905    264907    264909    264910    264911    264913    902000    902001

```

Nel Case control deck dobbiamo mettere

```

METHOD    = 1
MPC       = 1000
K2GG= KAAX
M2GG= MAAX
K2PP = STIFF
$
disp (plot)    = all
$
MONITOR (IMAG) =ALL
$
frequency = 120
sdamp     = 110
random    = 1000
gust      = 100
dload     = 100

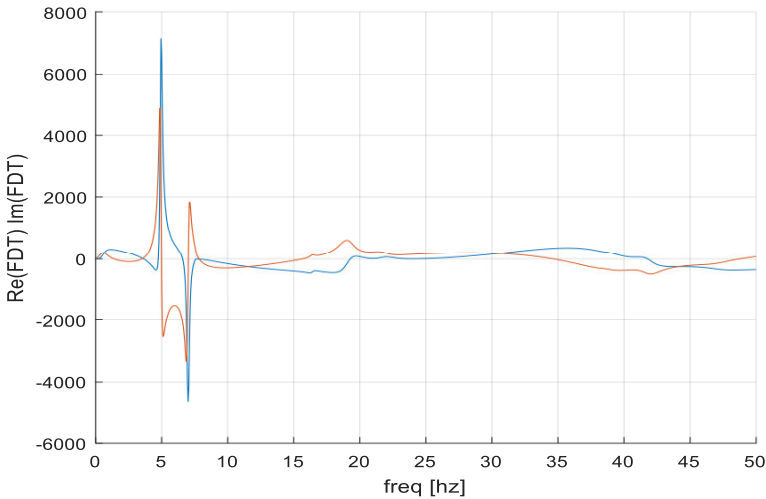
```

FDT dei carichi tramite Monitoring Point

Prendiamo l'output f06, qui troviamo le funzioni di trasferimento delle sei component di carico rispetto alla gust (indipendente da tipo di spettro, continua o discreta). **Sono vettori complessi**

STRUCTURAL MONITOR POINT INTEGRATED LOADS (MONPNT1)						
(REAL/IMAGINARY)						
MONITOR POINT NAME = WS1		COMPONENT = CX		GENERAL	SUBCASE NO.	1
LABEL = LH WING ROOT Y=-1290						
CP =	0	X = 6.192000E+03	Y = -1.290000E+03	Z = 2.800000E+02	CD =	0
FREQUENCY	INERTIAL	EXTERNAL	FLEXIBLE INCREMENT	GUST	TOTAL AERO	TOTAL
5.000000E-02	-2.817768E-05	0.000000E+00	7.521526E-20	-7.529159E-20	-7.632680E-23	-2.817768E-05
	-1.370091E-05	0.000000E+00	-5.675683E-21	7.842886E-22	-4.891394E-21	-1.370091E-05
1.000000E-01	-1.079831E-04	0.000000E+00	7.500650E-20	-7.527626E-20	-2.697578E-22	-1.079831E-04
	-1.008839E-05	0.000000E+00	-1.145795E-20	1.568384E-21	-9.889562E-21	-1.008839E-05
1.500000E-01	-2.360541E-04	0.000000E+00	7.453181E-20	-7.525090E-20	-7.190914E-22	-2.360541E-04
	2.894963E-05	0.000000E+00	-1.755497E-20	2.352098E-21	-1.520287E-20	2.894963E-05
2.000000E-01	-4.034763E-04	0.000000E+00	7.360640E-20	-7.521535E-20	-1.608944E-21	-4.034763E-04

Per ogni componente di carico (taglio, momento flettente, momento torcente...), per ogni monitoring point (ad esempio le sezioni dell'ala), si ha la FDT complessa:



PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, involucro dei carichi

Torniamo alla statistica e introduciamo altri concetti:

Siano $\{x\}$ e $\{y\}$ due processi gaussiani, potrebbero essere, ad esempio, momento flettente e momento torcente alla radice dell'ala!

Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

Varianza

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2$$

Root mean square

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Coefficiente di correlazione

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Il coefficiente di correlazione indica il livello di correlazione tra i due processi. Se pari a 1 $\{x\}$ e $\{y\}$ sono linearmente dipendenti.

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Consideriamo ora i due processi continui $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ possiamo definire le seguenti funzioni del tempo:

funzione covarianza

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\} \{y(t + \tau) - \mu_y\} dt$$

funzione autocovarianza

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\} \{x(t + \tau) - \mu_x\} dt$$

Funzione cross-correlazione

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t)\} \{y(t + \tau)\} dt$$

Funzione auto-correlazione

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t)\} \{x(t + \tau)\} dt$$

Per $\tau=0$ si ha

varianza

$$C_{xy}(0) = \sigma_{xy}$$

covarianza

$$C_{xx}(0) = \sigma_x^2$$

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Per definizione la funzione densità di potenza tra due processi stazionari è la trasformata di Fourier della funzione di cross correlazione:

Cross-spettro

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Autospettro o PSD

$$G_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Di conseguenza la funzione di autocorrelazione e cross correlazione sono date dalla trasformata inversa di Fourier:

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$
$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Sfruttando le proprietà delle funzione di correlazione, si ottiene per $\tau=0$

$$R_{xx}(0) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = \sigma_x^2$$
$$R_{xy}(0) = \int_0^{\infty} G_{xy}(f) df = \int_0^{\infty} \text{Re}(G_{xy}(f)) df = \sigma_{xy}$$

Si ha l'importante risultato che conoscendo spettro e cross spettro tra due processi si risale alle statistiche varianza e covarianza.

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Il calcolo della PSD senza conoscere la funzione di correlazione può essere fatto direttamente dalla trasformata di Fourier dei processi $\{y_1(t)\}$ e $\{y_2(t)\}$:

$$G_{y_1 y_2}(f) = \frac{2}{T} Y_1^*(f, T) Y_2(f, T)$$

Dove Y_1, Y_2 sono le trasformate di Fourier dei processi.

In realtà si implementa un algoritmo simile: ossia una stima mediata dello spettro secondo Welch. Dove i segnali sono suddivisi in n_d porzioni di lunghezza T e le loro trasformate di Fourier mediate. Il vantaggio è una stima migliore dello spettro a discapito della risoluzione in frequenza.

$$\hat{G}_{xy}(f) = \frac{2}{n_d T} \sum_{k=1}^{n_d} X_k^*(f, T) Y_k(f, T)$$

In Matlab si usa:

```
[Pxx, F] = pwelch(x, window, noverlap, nfft, fs)
```

```
[Pxy, F] = cpsd(x, y, window, noverlap, nfft, fs)
```

dove:

- x è il segnale;
- $window$ è un intero che definisce il numero di campioni della singola finestra. Viene usata una finestrata di hamming che rispetto alla finestra rettangolare riduce gli effetti di bordo.
- $Noverlap$ è il numero di campioni sovrapposti. Si usa una finestrata overlapped (sovrapposta) per aumentare il numero di medie a parità di lunghezza complessiva del segnale.
- $Nfft$, è il numero di linee spettrali della FFT
- Fs è la frequenza di campionamento

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Nel caso di un sistema lineare come il nostro sistema aeroelastico si ha:

$$[Y_1 \quad \dots \quad Y_N] = X [H_1 \quad \dots \quad H_N]$$

Dove $H(f)_i$ sono N funzioni di trasferimento tra l'input (es. la gust) e gli N output del sistema (es i carichi taglio, flettente, torcente...). In termini matriciali si ottiene la seguente relazione fondamentale per il calcolo stocastico.

$$G_{yy} = \frac{2}{T} H^* X^* X H$$

$$G_{yy} = H^* G_{xx} H$$

Nel caso di un solo input (es. ingresso di raffica):

$$G_{yy} = H^* H G_{xx}$$

Per ogni frequenza quindi si definisce una matrice NxN dove N sono gli output, dove la diagonale è popolata dalle PSD, fuori dalla diagonale i termini complessi definiti dai cross-spettri.

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Torniamo la velivolo!!!

La soluzione NASTRAN definisce il vettore H delle funzioni di trasferimento tra la gust e i carichi. prendiamo ad esempio momento flettente e torcente alla radice dell'ala.

Lo spettro di input è definito dalle normative. Volgiamo usare von Karman:

$$\Phi(f) = \sigma^2 \left(\frac{2\pi}{V} \right) \frac{L}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3} (1.339 L \Omega)^2}{[1 + (1.339 L \Omega)^2]^{11/6}}$$

Dove $\Omega = 2 \pi f / V$

La CS25 definisce $L=2500\text{ft}$

la normativa non definisce l'rms bensì definisce la design gust velocity comprensiva di un design ratio tra rms e picco.

$$y_{\text{design}} = \sigma_y \eta_d = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_w} \sigma_w \right) \eta_d = (\bar{A} \sigma_w) \eta_d = \bar{A} (\sigma_w \eta_d) \quad (5.2)$$

Design rms value of y → σ_y

Design ratio of peak to rms values → σ_w

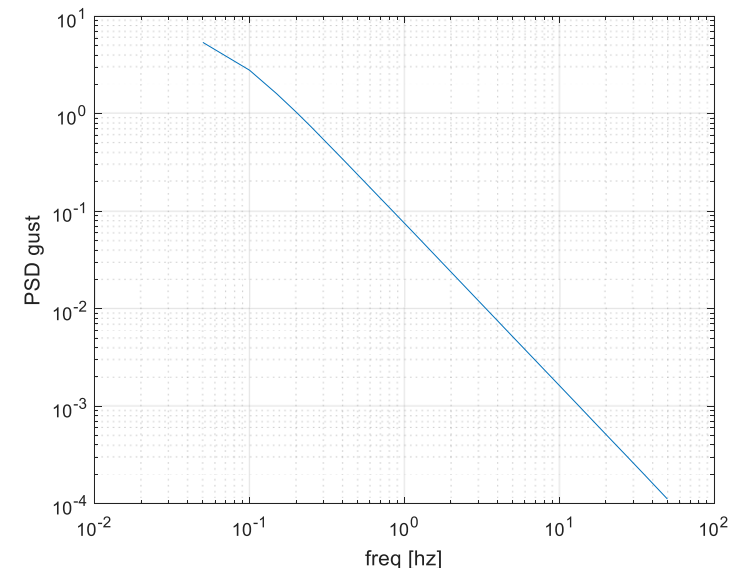
From dynamic analysis → η_d

Design gust velocity U_σ → $\sigma_w \eta_d$

$y_{\text{design}} = \bar{A} \cdot U_\sigma$

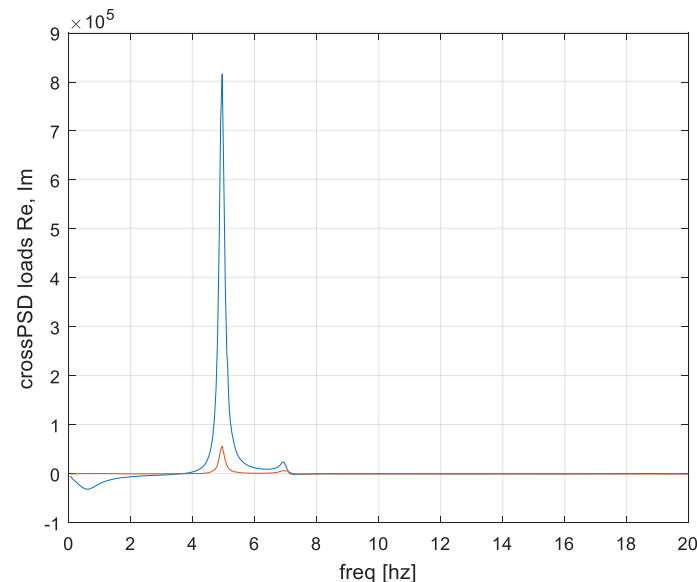
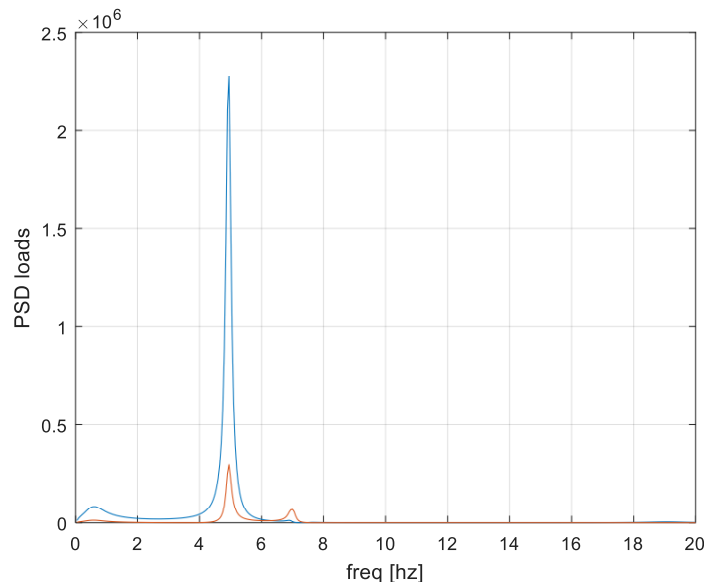
$$(5.3)$$

La PSD della gust con rms unitario, per la velocità di 263000mm/s e $L=2500\text{ft}$ è:



PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Gli spettri dei momenti alla gust unitaria sono:



Il valore di design dei momenti si ottiene moltiplicando la design gust velocity per il valore del parametro A definito come l'rms dell'output (radice quadrata dell'area sottesa alle PSD) fratto rms dell'input (unitario in questo caso).

$$A = \frac{\sigma_y}{\sigma_w}$$

Nel punto considerato la design gust velocity in accordo a CS25 è 85.48ft/s

Questo approccio ci consente di definire un valore di design per le singole componenti di carico. È importante però sapere come sono disposte tra loro le componenti ad esempio momenti flettente e momento torcente in quanto spesso gli inviluppi di carico che definiscono la capacità strutturale di una sezione sono cross plot tra due componenti.

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Ritorniamo al concetto di densità di probabilità $p(x)$ di Gauss.

Nel caso di una variabile è possibile selezionare un rapporto valore/rms tale da coprire una certa probabilità che quel valore non sia ecceduto.

E nel caso di più dimensioni?

Si ha in analogia al caso monodimensionale che:

$$p(\{x\}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det([\sigma_{xx}^2])}} e^{-\frac{1}{2}\{x\}^T [\sigma_{xx}^2]^{-1} \{x\}}$$

Dove $[\sigma_{xx}]$ è la matrice delle varianze.

La forma $\{x\}^T [\sigma_{xx}^2]^{-1} \{x\} = \lambda^2$ è una forma quadratica rappresentata dal un ellissoide che rappresenta il luogo delle isoprobabilità. Facciamo un esempio.

Prendiamo tre processi randomici, stazionari, x_1, x_2, x_3 che possono essere taglio, flettente e torcente in una sezione del velivolo con la seguente matrice delle varianze:

$$C = \sigma_{xx}^2 = \begin{bmatrix} 100 & 100 & -90 \\ 100 & 400 & -240 \\ -90 & -240 & 225 \end{bmatrix}$$

Che corrisponde a:

$$\text{rms}_1 = C(1,1)^{1/2} = 10;$$

$$\text{rms}_2 = C(2,2)^{1/2} = 20;$$

$$\text{rms}_3 = C(3,3)^{1/2} = 15;$$

$$C(i,j) = \rho_{i,j} \text{rms}_i \text{rms}_j$$

$$\rho_{12} = 0.5;$$

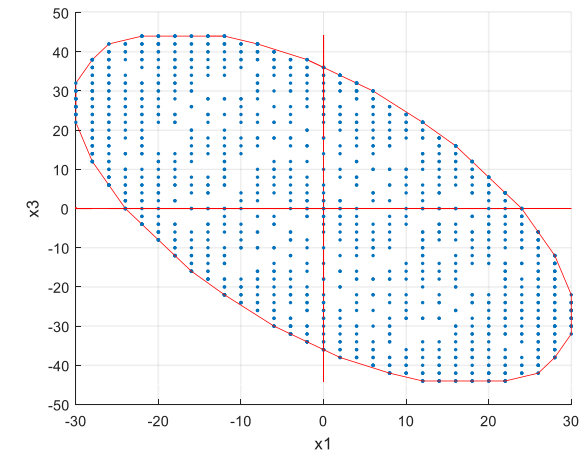
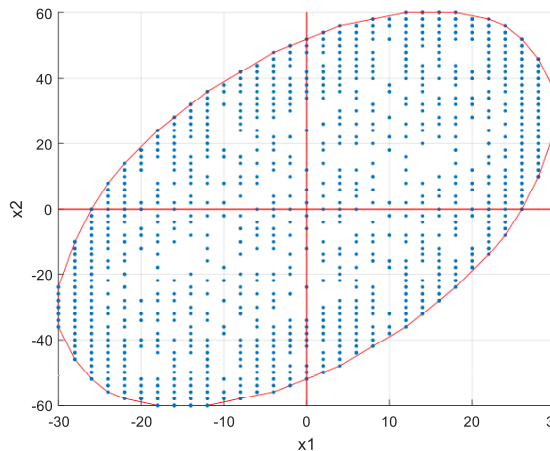
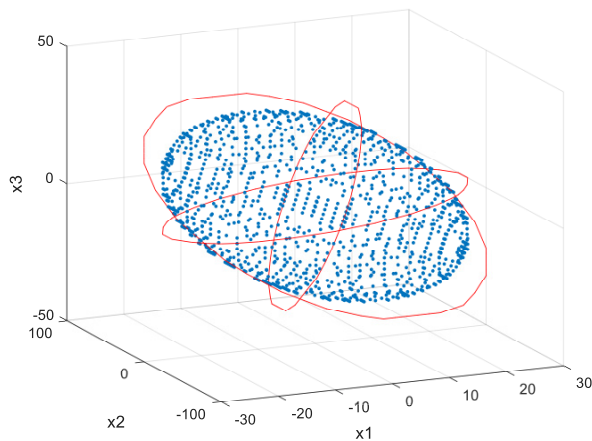
$$\rho_{23} = -0.6;$$

$$\rho_{13} = -0.8;$$

Si prenda $\lambda = 3$.

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Il luogo dei punti $\{x\}^T [\sigma_{xx}^2]^{-1} \{x\} = \lambda^2$ risulta essere un ellissoide dalla forma:



Questa è una rappresentazione che fornisce l'inviluppo dei processi con una data probabilità.

Se avessimo un campionamento dei processi si avrebbe che la probabilità che un campione definito da $[x1\{t_i\} \ x2\{t_i\} \ x3\{t_i\}]$ esca dall'ellissoide così definito è tanto minore quanto elevata la scelta di λ . Attenzione: l'ellissoide può avere n dimensioni. La scelta $\lambda=3$ fa sì che il massimo $x1$ è 3 volte il suo rms, ecc

La forma dell'ellissoide è governata dai coefficienti di correlazione.

PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Nella pratica non esiste quasi mai la necessità di definire esattamente l'ellissoide! Si ricorre ad una relazione approssimata che nei vari piani approssima l'ellissoide con il poligono circoscritto.

Sia $\rho = \rho_{12}$ si definisce:

$$l_A = 1 - \sqrt{2(1 - \rho)}$$

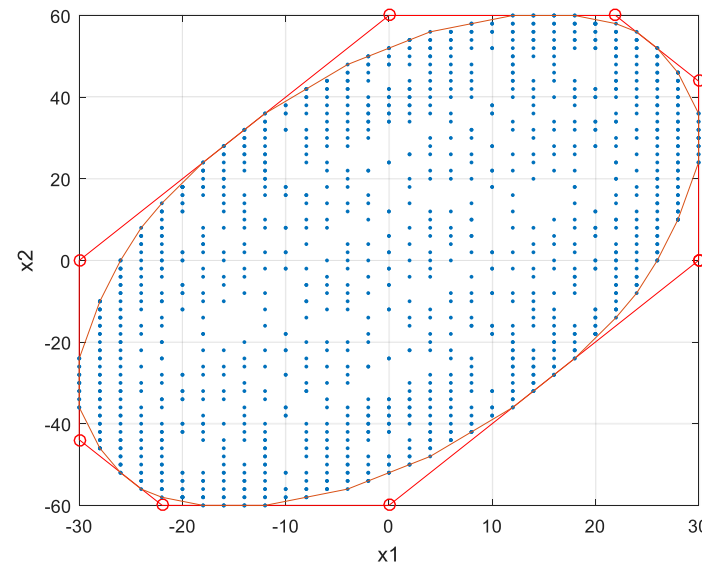
$$l_B = -1 + \sqrt{2(1 + \rho)}$$

Si definiscono i punti:

$e1 = \text{rms1} \cdot [1 \ 1 \ l_B \ l_A \ -1 \ -1 \ -l_B \ -l_A \ 1];$

$e2 = \text{rms2} \cdot [l_A \ l_B \ 1 \ 1 \ -l_A \ -l_B \ -1 \ -1 \ l_A];$

questi definiscono il seguente poligono. Stesso approccio per gli altri piani.



PSD, Varianza e Covarianza, Ellissoide di probabilità, inviluppo dei carichi

Torniamo al velivolo e alla gust:

1. Si calcolano le FDT dei carichi alla gust con la SOL146;
2. Si calcola la matrice di spettri e cross-spettri considerando uno spettro di gust con rms unitario;
3. Si calcola la matrice delle varianze integrando gli spettri. L'integrale delle PSD è la varianza, l'integrale della parte reale del cross-spettro è la covarianza;

$$rms_1 = \sqrt{\sigma_{11}^2} = \sqrt{\int_0^\infty G_{11}(f)df}$$

$$rms_2 = \sqrt{\sigma_{22}^2} = \sqrt{\int_0^\infty G_{22}(f)df}$$

4. Si calcola in coefficiente di correlazione r ;

$$\sigma_{12} = \int_0^\infty Re(G_{12}(f))df$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{rms_1 rms_2}$$

5. Si definisce il poligono circoscritto all'ellissoide scegliendo $\lambda = U_{de}$

Lo stesso risultato si ottiene ponendo l'rms dello spettro di gust pari a U_{de}

Buffet – introduzione del fenomeno

Una ulteriore sorgente di carichi instazionari è il **buffet**.

Cosa si intende per buffet?

È un fenomeno che riguarda principalmente velivoli acrobatici o comunque da superiorità aerea in quanto sono chiamati a volare ad assetti o regimi in cui il flusso separa e genera turbolenza. Alti angoli di attacco, separazione dello strato limite a valle dell'onda d'urto in regime transonico, ecc.

Le scie vorticosche che si generano contengono una forte instazionarietà del campo di pressione. Quando queste impattano su superfici a valle, es i piani di coda, le oscillazioni di pressioni generano forze instazionarie che eccitano la dinamica strutturale!

Casi tipici: **aerofreno** estratto sulla deriva, **alti angoli di attacco**, **LEX vortex** (es F18) ed infatti l'immagine più rappresentativa sul buffet in letteratura è:



Dryden Flight Research Center EC89-0096-240 Photographed 1989
F-18 HARV smoke and tuft flow visualization.
Angle of Attack = 30 deg. NASA photo.



Caratterizzazione dell'input, Flight Test, CFD

La cosa più complessa nel caso del buffet è **caratterizzare l'input instazionario**, ossia capire come agiscono le fluttuazioni di pressioni.

Queste non rispondono ad uno schema deterministico. Sono randomiche, sono un **processo stocastico**, supposto gaussiano e stazionario se stazionarie sono le condizioni che lo generano (es: aoa, mach, quota, ...).

Data la natura randomica si utilizza un **approccio in frequenza e alla statistica** perché se le storie temporali sono random, le relative statistiche possono essere modellate.

Per definire l'input esistono due modi. **Sperimentale** (in volo o in galleria del vento) o simulazione instazionaria **CFD**.

Flight Test/Galleria del vento

Le superfici sono strumentate con sensori di pressione ad alto campionamento;



Fig. 4 Model D2, clean configuration, in DNW/HST wind tunnel

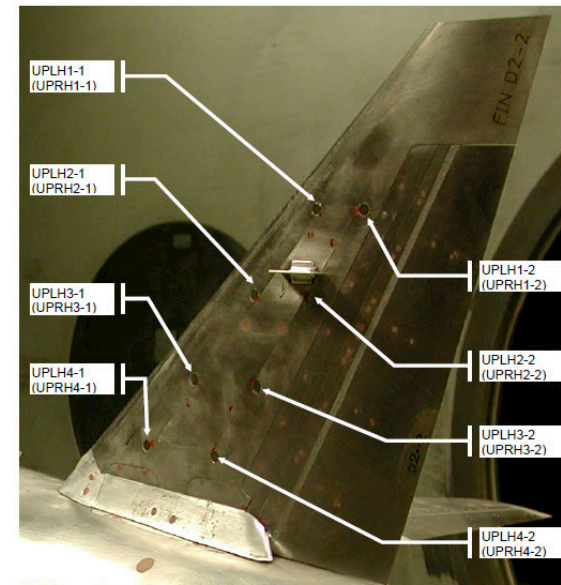
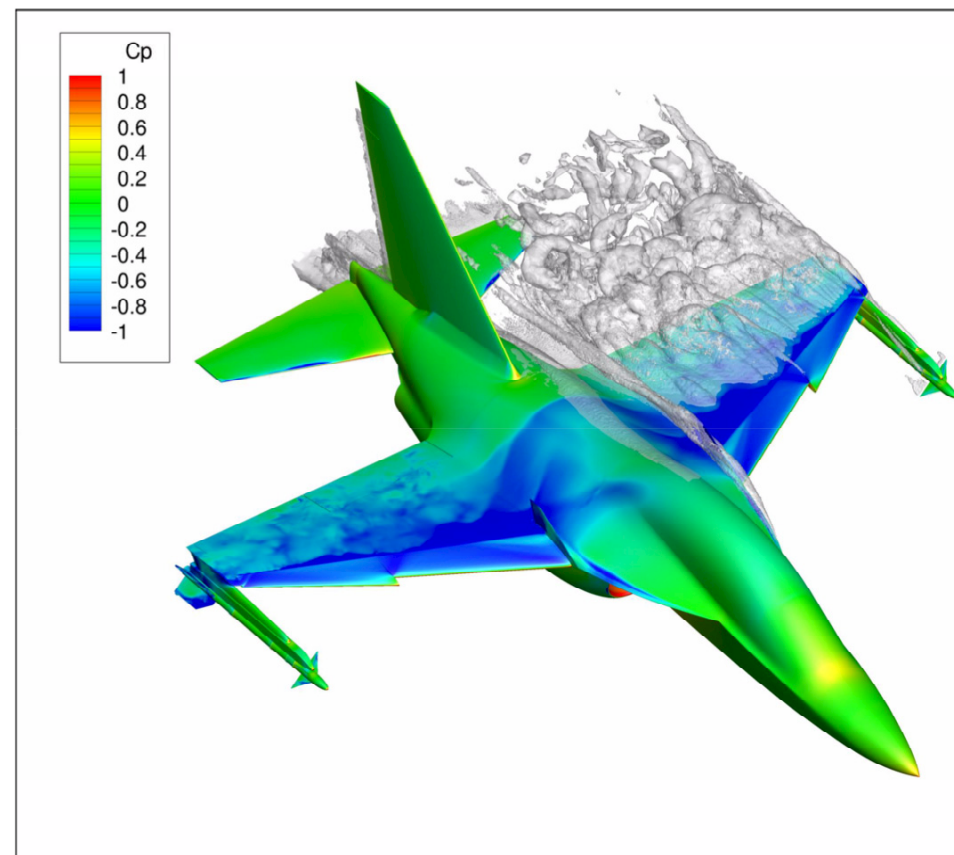
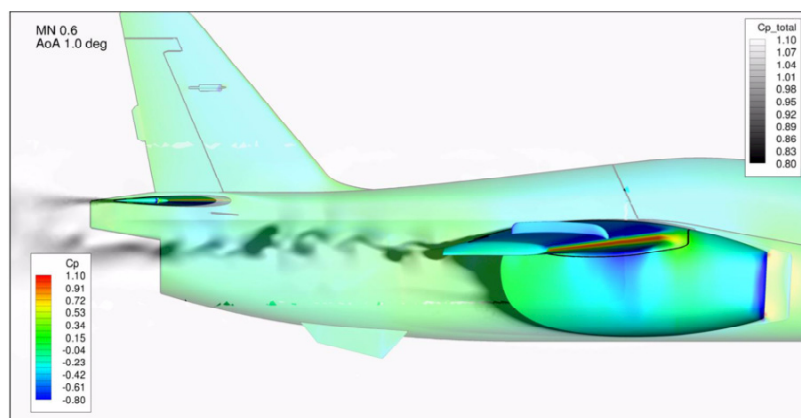


Fig. 5 Pressure tabs layout on model VT

Caratterizzazione dell'input, Flight Test, CFD

CFD

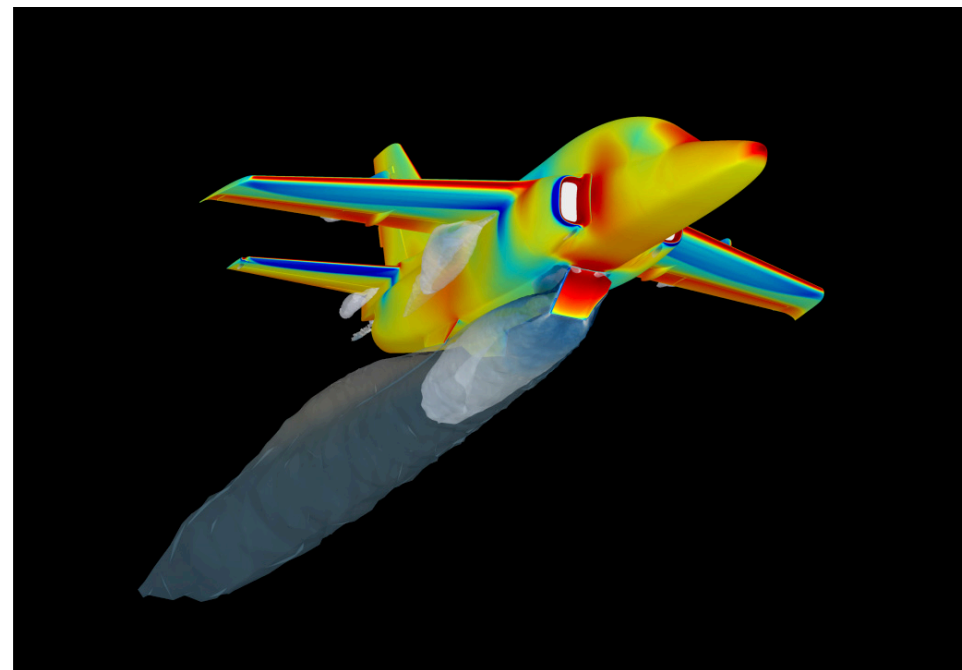
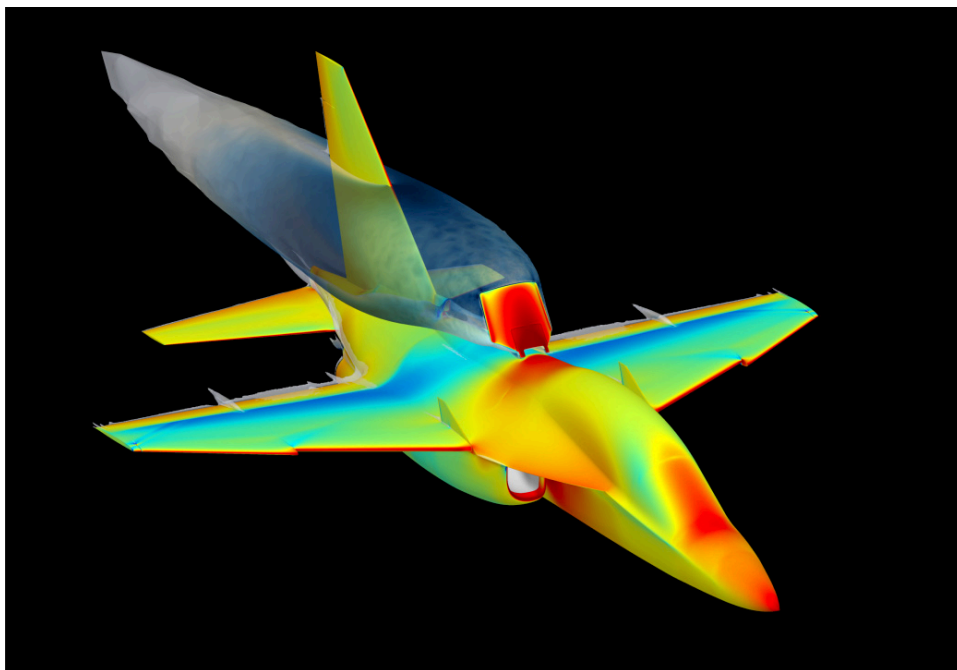
Ha il vantaggio di consentire una soluzione di volume praticamente continua. Richiede tempi di calcolo e risorse computazionali sufficienti ma i risultati ricompensano dei lunghi tempi di attesa!



Si ricorre a tecniche di simulazione Navier-Stokes con modelli di turbolenza adeguati in cui si richiede come output della simulazione la time history di pressione su un set di punti sulla superficie

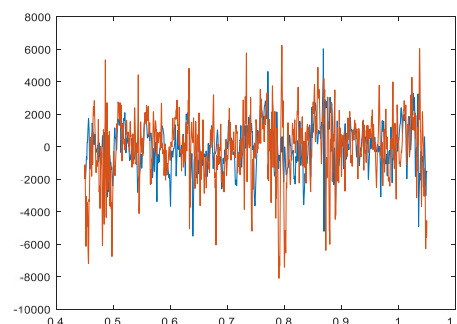
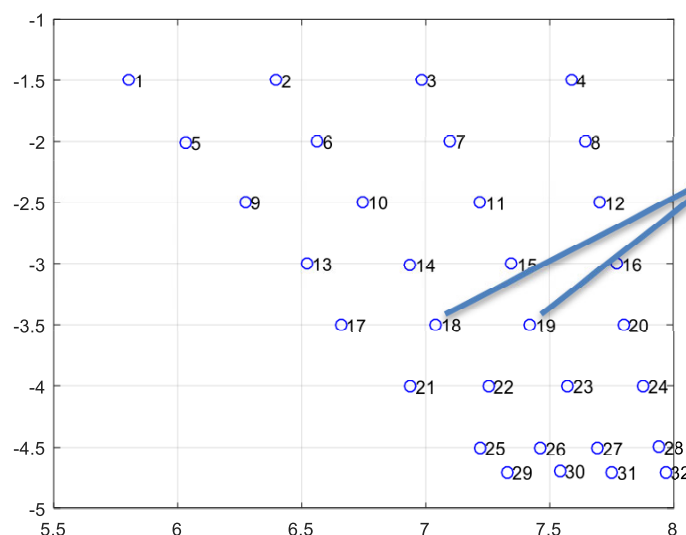
Caratterizzazione dell'input, Flight Test, CFD

CFD



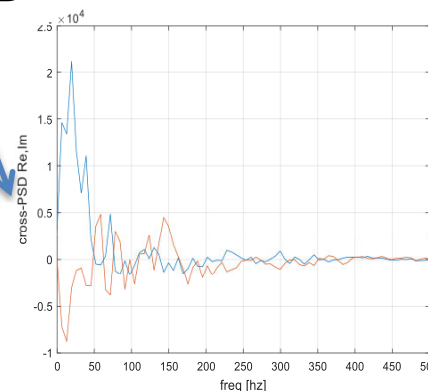
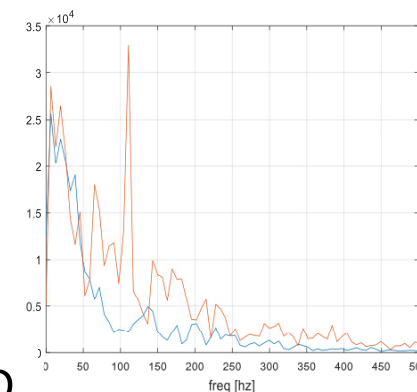
Caratterizzazione dell'input, Flight Test, CFD

Si ricorre a tecniche di simulazione Navier-Stokes con modelli di turbolenza adeguati in cui si richiede come output della simulazione la time history di pressione su un set di punti sulla superficie es:



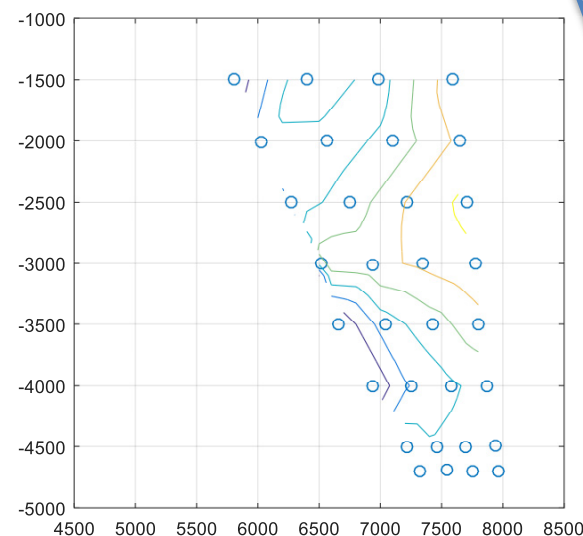
PSD

Cross-PSD



- Time history di pressione:
- Si calcola la PSD delle pressioni differenziali
- Si calcola il cross-spettro

Questo andrebbe ripetuto per tutte le coppie su cui sono state acquisite/simulate le pressioni differenziali al fine di costruire la matrice dei spettri e cross-spettri e la mappa di distribuzione degli rms:



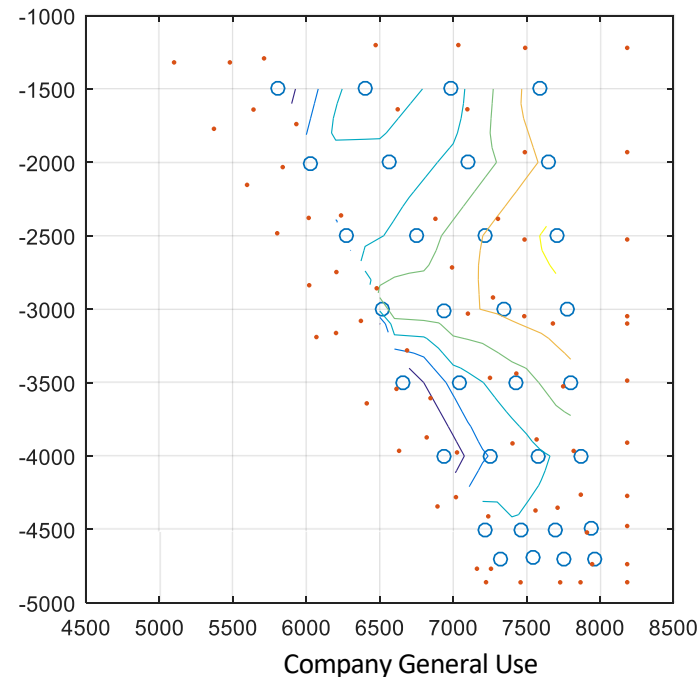
Soluzione del problema aeroelastico

La soluzione del problema aeroelastico sarà quindi simile a quanto visto per la gust continua.

$$G_{yy} = H^* I^T G_{pp} I H$$

Dove:

- $[G_{pp}]$ è la matrice degli spettri e cross-spettri delle pressioni. Per ogni step in frequenza ha dimensione $[n_p \times n_p]$ dove n_p è il numero di sonde di pressione. n_p sul dorso e n_p sul ventre. Noi usiamo le pressioni differenziali.
- $[I]$ è una matrice di interfaccia di dimensioni $[n_p \times n_f]$ dove n_f sono il numero di grid del modello fem (il nostro modello Nastran) su cui agiscono le forze. Questa matrice è necessaria per passare da un set limitato di pressioni (misurate o simulate) ad una distribuzione di forze sui grid strutturali, in accordo a $F = p I$ dove $F = \{F_1 F_2 \dots F_{n_f}\}$ e $p = \{p_1 p_2 \dots p_{n_p}\}$; La matrice $[I]$ tiene conto anche delle aree da moltiplicare per le pressioni per ottenere le forze corrispondenti. Esistono vari metodi che qui non trattiamo per ottenere $[I]$ diciamo solo che si basano su algoritmi di **regressione ai minimi quadrati mobili**.



Soluzione del problema aeroelastico

[H] è la matrice delle funzioni di trasferimento di dimensioni [nfx6] tra le forze che agiscono sui grid strutturali e le 6 componenti di carico su un monitoring point. La matrice [H] si ottiene dal lancio Nastran, SOL146
Quindi tutto in frequenza, sarà

$\{Y\} = \{F\} [H];$
 $\{F\} = \{p\} [I];$
 quindi $\{Y\} = \{p\} [I] [H];$
 $\{Y\}^* \{Y\} = [H]^* [I]^T \{p\}^* \{p\} [I] [H];$
 e ricordando che:

$$G_{y_1 y_2}(f) = \frac{2}{T} Y_1^*(f, T) Y_2(f, T)$$

Si ottiene

$$G_{yy} = H^* I^T G_{pp} I H$$

Dove

$$G_{ff} = I^T G_{pp} I$$

È la matrice degli spettri delle forze.

In pratica si ricorre ad una approssimazione del metodo. Si suppone che la distribuzione di rms di forze instazionarie sia determinata da un unico input di buffet la cui PSD ha forma G_{bb} e rms unitario. Forze tra loro sufficientemente vicini hanno $\rho=1$, al difuori $\rho=0$; ciò porta alla seguente formulazione:

$$G_{ff} = G_{bb} [\sigma_{ff}^2]$$

Dove $[\sigma_{ff}^2]$ è la matrice con le varianze delle forze sulla diagonale, fuori dalla diagonale si ha $\sigma_{ff}^2(i,j) = \sigma_{ff}(i) \sigma_{ff}(j)$ se i punti i-esimo e j-esimo sono correlati, $\sigma_{ff}^2(i,j)=0$ se questi sono supposti non correlati.

Soluzione del problema aeroelastico

La costruzione della matrice [H] viene effettuata in Nastran

Si definiscono nf subcase

Subcase 1

DLOAD=1

Ogni DLOAD farà riferimento al suo rload1

```
rload1 7 7 100
```

che rimanda alla DAREA

```
DAREA 7 901921 3 1.00+0
```

Dove

```
tabled1 100
0.0 1.0 100.0 1.0 endt
```

L'output nell'f.06 sarà organizzato per subcase: e per monitoring point: i valori complessi definiscono la matrice [H]

STRUCTURAL MONITOR POINT INTEGRATED LOADS (MONPNT1)
(REAL/IMAGINARY)

```
MONITOR POINT NAME = WS3          COMPONENT = CX          GENERAL          SUBCASE NO.          1
LABEL = LH WING MID Y=-3100
CP = 0          X = 6.922000E+03          Y =-3.100000E+03          Z = 3.120000E+02          CD = 0

FREQUENCY    INERTIAL    EXTERNAL    FLEXIBLE    GUST    TOTAL    TOTAL
              INCREMENT
-----
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -2.127750E-20  -----  -2.127750E-20  -2.127750E-20
              0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -----  0.000000E+00  0.000000E+00
5.000000E-01  -8.185096E-03  0.000000E+00  -8.145334E-21  -----  -8.145334E-21  -8.185096E-03
              -1.994409E-02  0.000000E+00  -2.314954E-22  -----  -2.314954E-22  -1.994409E-02
1.000000E+00  -1.180321E-01  0.000000E+00  -6.891590E-21  -----  -6.891590E-21  -1.180321E-01
              -1.222261E-01  0.000000E+00  6.074490E-21  -----  6.074490E-21  -1.222261E-01
1.500000E+00  -7.347442E-02  0.000000E+00  -3.416193E-21  -----  -3.416193E-21  -7.347442E-02
              -2.456620E-02  0.000000E+00  6.395454E-21  -----  6.395454E-21  -2.456620E-02
2.000000E+00  -6.896903E-02  0.000000E+00  -1.565288E-21  -----  -1.565288E-21  -6.896903E-02
              -1.777299E-02  0.000000E+00  5.583173E-21  -----  5.583173E-21  -1.777299E-02
```

Soluzione del problema aeroelastico

Il calcolo dei carichi seguono le stesse considerazioni della gust.

Calcolati gli spettri e i cross-spettri dei carichi, l'ellissoide sarà approssimato dal poligono caratterizzato da:

$$rms_1 = \sqrt{\sigma_{11}^2} = \sqrt{\int_0^\infty G_{11}(f)df}$$

$$rms_2 = \sqrt{\sigma_{22}^2} = \sqrt{\int_0^\infty G_{22}(f)df}$$

$$\sigma_{12} = \int_0^\infty Re(G_{12}(f))df$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{rms_1 rms_2}$$

I punti che definiscono il poligono sono:

el1=rms1 λ [1 1 l_B l_A -1 -1 - l_B - l_A 1];

el2=rms2 λ [l_A l_B 1 1 - l_A - l_B -1 -1 l_A];

ora $\lambda=3$ o altro valore di rapporto picco/rms tale da rispettare la probabilità di eccedenze voluta